CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
GRIGORE C. MOISIL
Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA A X -a

1. Oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, \cdots, a_n, n \geq 3$, cel puţin unul dintre numerele

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - (n^2 - n + 2)a_i a_j, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

este mai mare sau egal cu zero.

2. Fie $x \in N, k \geq 2$ şi p un număr natural par nenul. Determinaţi numerele naturale n pentru care $\dfrac{n+p}{\left[\sqrt[k]{n+1}\right]}$ şi $\dfrac{n+p+1}{\left[\sqrt[k]{n}\right]}$ sunt numere naturale ([x] reprezintă partea întreagă a numărului real x).

3. Fie mulţimea $X = \{0, 1, 2, .., 2013\}$.
a) Să se determine numărul de moduri în care mulţimea X se poate partiţiona în două părţi (nevide) de cardinale diferite.
b) Să se determine cel mai mare număr n pentru care mulţimea X se poate partiţiona în n submulţimi (nevide), oricare două având cardinale diferite.

4. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. Pentru un număr complex a cu $\mid a \mid = 1, a \neq \pm 1$. Considerăm ecuaţia:

$$(x+1)^n + (ax+1)^n = 0$$

1. Să se arate că rădăcinile ecuaţiei sunt situate pe o dreaptă d_a.
2. Dreptele d_a şi d_b sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $a + b = 0$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.