CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
GRIGORE C. MOISIL
Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA A XI -a

1. Fie numerele reale a şi b cu $a > 1, b \geq 2$. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi $x_{n+1} = bx_n^2 - \frac{2}{b}, n \geq 1$.

Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{b^n x_1 \cdot x_2 \dots x_n}.$$

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale, $a_1 \geq 1$. Studiaţi convergenţa şirului

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]}, n = 1, 2, ...;$$

unde $[x, y]$ reprezintă *c.m.m.m.c* al numerelor naturale x şi y.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pentru care există trei matrice $B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca:

$$A^k = 2^k B + k \cdot C + D, \ \forall\ k \in \{1, 2, 3, 4\} \ \ (1)$$

Să se arate că relaţia (1) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie care satisface relaţia $f(f(x)) = x^2$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

1. Să se determine $f(1)$.
2. Să se determine funcţia f ştiind că este derivabilă în punctul $x = 1$

Notă: Timp de lucru 4 ore

SOLUŢII ŞI BAREME
Clasa a XI-a

1. Fie numerele reale a şi b cu $a > 1, b \geq 2$. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi $x_{n+1} = bx_n^2 - \dfrac{2}{b}, n \geq 1$.

Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{b^n x_1 \cdot x_2 \dots x_n}.$$

Gazeta Matematică, 12/2012

Soluţie:

i) Avem

$$x_2 = bx_1^2 - \frac{2}{b} = bx_1^2 - \frac{2}{b} > \frac{2}{b}$$

deoarece este echivalentă cu $a^2b^2 > 4$ 1p

Presupunem $x_n > \frac{2}{b}$ şi avem:

$$x_{n+1} = bx_n^2 - \frac{2}{b} > b \cdot \frac{4}{b^2} - \frac{2}{b} = \frac{2}{b}.$$

Aşadar, $x_n > \dfrac{2}{b}, (\forall) n \in N, n \geq 2$ **1p**

Din

$$x_{n+1} - x_n = bx_n^2 - x_n - \frac{2}{b} > b \cdot \frac{2}{b} \cdot x_n - x_n - \frac{2}{b} =$$

$= x_n - \dfrac{2}{b} > 0$ pentru $n \geq 2$,

rezultă că (x_n) este strict crescător. **1p**

Presupunem că $(x_n)_{n\geq 1}$, este mărginit superior, atunci rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. **1p**

Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem:

$$l = bl^2 - \frac{2}{b},$$

care are rădăcinile $l_1 = \frac{2}{b}$ şi $l_2 = -\frac{1}{b}$.

Nici una din aceste valori nu poate fi limita şirului. **1p**

Avem contradicţie. Rezultă că şirul nu este mărginit, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ **1p**

ii) Acum, din

$0 < \dfrac{1}{b^n x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}} < \dfrac{1}{b^n \cdot x_1^{n-1}} \longrightarrow 0$, rezultă

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{b^n x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = 0.$ **1p**

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale, $a_1 \geq 1$. Studiaţi convergenţa şirului

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]}, n = 1, 2, ...;$$

unde $[x, y]$ reprezintă *c.m.m.m.c* al numerelor naturale x şi y.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie. Mai întâi demonstrăm că pentru numerele naturale $a, b, a < b$, avem $b - a \geq (a, b)$, unde (a, b) reprezintă *c.m.m.m.c* al numerelor a şi b. **1p**

Fie $d = (a, b)$; atunci $a = b \cdot x, b = d \cdot y$ cu $(x, y) = 1$.

Din $a < b$ avem $x < y$ cu $y - x \geq 1$.

Prin urmare, avem $b - a = d(y - x) \geq d = (a, b)$. **1p**

Cum

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{[x_{n+1}, x_{n+2}]} > 0,$$

deducem că şirul (x_n) este strict crescător **1p**

Folosind relaţiile

$(a, b) = \dfrac{ab}{[a, b]} > 0$ şi $b - a \geq (a, b)$

putem scrie

$b - a \geq \dfrac{ab}{[a, b]}$, ... **1p**

iar de aici:

$\dfrac{1}{[a, b]} \leq \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$ **0.5p**

Cu această inegalitate, putem scrie

$x_n \leq \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3} + ... + \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}} =$ **1p**

$\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_{n+1}}$ **0.5p**

de unde $x_n < \dfrac{1}{a_1}$ **0.5p**

Rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, este mărginit şi deci convergent. **0.5p**

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pentru care există trei matrice $B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca:

$$A^k = 2^k B + k \cdot C + D, \ \forall \ k \in \{1, 2, 3, 4\} \ (1) \tag{1}$$

Să se arate că relaţia (1) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Vasile Pop, Cluj - Napoca

Soluţie. Pentru $k = 1, 2, 3, 4$ obţinem relaţiile:

$$A = 2B + C + D \tag{2}$$

$$A^2 = 4B + 2C + D \tag{3}$$

$$A^3 = 8B + 3C + D \tag{4}$$

$$A^4 = 16B + 4C + D \tag{5}$$

.... **1p**

Înmulţind relaţia (2) cu -2, relaţia (3) cu 5, relaţia (4) cu -4 şi relaţia (5) cu 1, **1p**

prin adunare obţinem:

$$A^4 - 4A^3 + 5A^2 - 2A = 0A^4 = 4A^3 - 5A^2 + 2A$$

.... **1p**

şi apoi

$$A^{k+1} = 4A^k - 5A^{k-1} + 2A^{k-2}.$$

.... **1p**

Dacă prin inducţie presupunem că relaţia (1) este adevărată pentru k, $k-1$ şi $k-2$ **1p**

rezultă:

$$A^{k+1} + 4(2^k \cdot B + k \cdot C + D) - 5(2^{k-1} \cdot B + (k-1)C + D) + 2(2^{k-2} \cdot B + (k-2)C + D)$$

$$= (2 \cdot 2^{k+1} - 5 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-1})B + (4k - 5(k-1) + 2(k-2))C + (4 - 5 + 2)D$$

$$= 2^{k+1}B + (k+1)C + D,$$

.... **1p**

deci relaţia are loc şi pentru $k + 1$.

4. Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcţie care satisface relaţia $f(f(x))=x^2$ pentru orice $x\in(0,\infty)$.

1. Să se determine $f(1)$.
2. Să se determine funcţia f ştiind că este derivabilă în punctul $x=1$

Dorin Andrica, Cluj - Napoca

Soluţie.

Vom Arăta că funcţia f satisface relaţia:
$\sqrt{f(x)}=f(\sqrt{x})$, ... **1p**

pentru orice $x\in(0,\infty)$, relaţie care se va dovedi utilă în continuare. Într-adevăr, din relaţia satisfăcută de f rezultă $f(f(f(x)))=f(x^2)$, ... **1p**

deci obţinem $f^2(x)=f(x^2)$ pentru orice $x\in(0,\infty)$. Înlocuind x cu $\sqrt{x}$ rezultă relaţia de mai sus.

1) Pentru $x=1$ obţinem $f^2(1)=f(1)$, deci $f(1)=1$ **1p**

2) Prin inducţie rezultă imediat că are loc relaţia:
$f(x)^{\frac{1}{2^n}}=f(x^{\frac{1}{2^n}})$, ... **1p**

pentru orice număr natural n şi pentru orice $x\in(0,\infty)$. Obţinem:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x^{\frac{1}{2^n}}))^{2^n}=\lim_{n\to\infty}(1+(f(x^{\frac{1}{2^n}})-1))^{2^n}=$$

$=e^{\lim_{n\to\infty}2^n(f(x^{\frac{1}{2^n}})-1)}$ **1p**

Notând $t=x^{\frac{1}{2^n}}$ obţinem $2^n=\frac{\ln x}{\ln t}$ şi deci limita de la exponent devine:
$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x^{\frac{1}{2^n}})-1)=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\ln x}{\ln t}(f(t)-1)=(\ln x)\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t-1}{\ln t}\cdot\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)\ln x$, **1p**

Prin urmare $f(x)=x^{c^2}$, unde $c=f'(1)$. Prin verificarea din enunţ rezultă $x^{c^2}=x^2$, deci $c=\pm\sqrt{2}$.

Prin urmare funcţiile cu proprietatea din enunţ sunt $f(x)=x^{\sqrt{2}}$ şi $f(x)=x^{-\sqrt{2}}$. **1p**