CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ GRIGORE C. MOISIL

Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA A XI -a

1. Fie numerele reale a şi b cu $a > 1, b \geq 2$. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi $x_{n+1} = bx_n^2 - \frac{2}{b}, n \geq 1$.

Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{b^n x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}.$$

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale, $a_1 \geq 1$. Studiaţi convergenţa şirului

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]}, n = 1, 2, ...;$$

unde $[x, y]$ reprezintă *c.m.m.m.c* al numerelor naturale x şi y.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pentru care există trei matrice $B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca:

$$A^k = 2^k B + k \cdot C + D, \ \forall\ k \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (1)$$

Să se arate că relaţia (1) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie care satisface relaţia $f(f(x)) = x^2$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

1. Să se determine $f(1)$.
2. Să se determine funcţia f ştiind că este derivabilă în punctul $x = 1$

Notă: Timp de lucru 4 ore