CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
GRIGORE C. MOISIL
Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA A XII -a

1. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o *funcţie continuă* şi $a \geq 0$. *Şirul* $(x_n)_{\geq 0}$, *cu* $x_o \in [0,1]$ *este definit prin:*

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + \int_0^{x_n} f(t)dt}{a+1}$$

Studiaţi convergenţa şirului şi să se calculeze limita şirului.

2. Fie $f : [1,\infty) \to R$ derivabilă astfel ca $f'(x) = \dfrac{1}{x^3 + x \cdot f^2(x)}$ şi $f(1) \geq 1$. Să se arate că $f(x) < f(1) + \ln\sqrt{2}$ pentru orice $x \in [1,\infty)$.

3. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel finit cu proprietatea ca $1+1=0$. Să se arate că numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2 = 0$ este egal cu numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2 = 1$

4. Fie K un corp finit de caracteristică $p, a \in K^*$ şi $f \in K[X]$. Arătaţi că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:
(a) $f(X) = f(X+a)$
(b) există $g \in K[X]$ astfel încât $f(X) = g(X^p - a^{p-1}X)$

Notă: Timp de lucru 4 ore

SOLUŢII ŞI BAREME
Clasa a XII-a

1. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o *funcţie continuă* şi $a \geq 0$. *Şirul* $(x_n)_{\geq 0}$, *cu* $x_o \in [0,1]$ *este definit prin:*

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + \int_0^{x_n} f(t)dt}{a+1}$$

Studiaţi convergenţa şirului şi să se calculeze limita şirului.

Gazeta Matematică, 12/2012

Soluţie. Prin inducţie se arată imediat că $x_n \geq 0, \forall n \in N$. **1p**

Avem

$$x_{n+1} - x_n = (\frac{a}{a+1} - 1)x_n + \frac{1}{a+1}\int_0^{x_n} f(t)dt =$$

$= -\dfrac{x_n}{a+1} + \dfrac{1}{a+1}\displaystyle\int_0^{x_n} f(t)dt$ **1p**

$= \dfrac{1}{a+1}\displaystyle\int_0^{x_n} (f(t)-1)dt \leq 0$ **1p**

de unde rezultă că şirul este monoton descrescător.
Deci, şirul este convergent .... **1p**.

Pentru $f(t) = 1, (\forall)t \in [0,1]$ şirul este constant $x_n = x_0 (\forall) n \in N$,
deci $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ .... **1p**.

Pentru $f \neq 1$, fie $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.
Trecem la limită în relaţia de recurenţă şi avem:

$$(a+1)l = al + \int_0^l f(t)dt$$

sau
$l = \displaystyle\int_0^l f(t)dt$ **1p**
sau
$\displaystyle\int_0^l (f(t)-1)dt = 0$

de unde $l = 0$ **1p**

2. Fie $f : [1, \infty) \to R$ derivabilă astfel ca $f'(x) = \dfrac{1}{x^3 + x \cdot f^2(x)}$ şi $f(1) \geq 1$.
Să se arate că $f(x) < f(1) + \ln \sqrt{2}$ pentru orice $x \in [1, \infty)$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie. $f'(x) > 0$ rezultă că f este strict crescătoare şi $f(t) > f(1) \geq 1$ pentru orice $t > 1$. **1p**

Avem:

$f'(t) = \dfrac{1}{t^3 + t \cdot f^2(t)} < \dfrac{1}{t^3 + t \cdot f^2(1)} \leq \dfrac{1}{t^3 + t}, t > 1$ **2p**

Putem scrie:

$f(x) = f(1) + \displaystyle\int_1^x f'(t)dt < f(1) + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{2dt}{t^3 + t} =$ **1p**

$= f(1) + \dfrac{1}{2} \left(\ln \dfrac{x^2}{x^2 + 1} - \ln \dfrac{1}{2} \right)$ **2p**

$< f(1) + \dfrac{1}{2} \ln 2,$ **1p**

3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel finit cu proprietatea ca $1 + 1 = 0$. Să se arate că numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2 = 0$ este egal cu numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2 = 1$

Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc

Soluţie. Fie $M = \{x_1, ..., x_m\}$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 = 0$ şi $N = \{y_1, ..., y_n\}$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 = 1$. **1p**

Considerăm funcţia $f : M \to A, f(x) = 1 + x$. **1p**

Avem $f(x)^2 = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1$, pentru orice $x \in M$, deci $f(x) \in N$, pentru orice $x \in M$. **1p**

Deoarece f este injectivă rezultă că $m \leq n$. **1p**

Fie funcţia $g : N \to A, g(x) = 1 + x$. **1p**

Avem $g(x)^2 = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 0$, ... **1p**

deci $g(x) \in M$, pentru orice $x \in N$. În plus, g este injectivă, deci avem şi $n \leq m$.
Rezultă $m = n$ **1p**

4. Fie K un corp finit de caracteristică $p, a \in K^*$ şi $f \in K[X]$. Arătaţi că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:
(a) $f(X) = f(X+a)$
(b) există $g \in K[X]$ astfel încât $f(X) = g(X^p - a^{p-1}X)$

Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc, *Sorin Rădulescu*, Bucureşti

Soluţie.
$(b) \Rightarrow (a)$

$f(X+a) = g((X+a)^p - a^{p-1}(X+a)) = g(X^p + a^p - a^{p-1}X - a^p) =$

$= g(X^p - a^{p-1}X) = f(X)$ **2p**

$(a) \Rightarrow (b)$

Dacă f este constant, atunci $g = f$. **1p**

Presupunem f neconstant.

Avem $f(0) = f(a) = f(2a) = ... = f((p-1)a)$, adică $0, a, ..., (p-1)a$

sunt rădăcini pentru polinomul $f(X) - f(0)$. **1p**

Atunci $f(X) - f(0) = X(X-a)...(X-(p-1)a) \cdot f_1(X)$ **1p**

Dar $X(X-a)(X-2a)...(X(p-1)a) = X^p - a^{p-1}X = h$, deci $f = h \cdot f_1 + a_0$,
unde $a_0 = f(0)$ **1p**

Din $f(X) = f(X+a)$ rezultă $f_1(X) = f_1(X+a)$ şi, procedând ca mai sus, obţinem $f_1 = h \cdot f_2 + a_1$ cu $a_1 = f_1(0), ..., f_{n-1} = h \cdot f_n + a_{n-1}$ cu $a_{n-1} = f_{n-1}(0)$ şi $f_n = a_n$ polinom constant.

Din aceste egalităţi deducem $f = a_n h^n + a_{n-1}h^{n-1} + ... + a_1 h + a_0$ şi atunci $g = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ **1p**