CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
GRIGORE C. MOISIL
Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA A XII -a

1. Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcţie continuă şi $a\geq 0$. Sirul $(x_n)_{\geq 0}$, cu $x_0\in[0,1]$ este definit prin:

$$x_{n+1}=\frac{ax_n+\int_0^{x_n}f(t)dt}{a+1}$$

Determinaţi limita şirului.

2. Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ derivabilă astfel ca $f'(x)=\dfrac{1}{x^3+x\cdot f^2(x)}$ şi $f(1)\geq 1$. Să se arate că $f(x)<f(1)+\ln\sqrt{2}$ pentru orice $x\in[1,\infty)$.

3. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel finit cu proprietatea ca $1+1=0$. Să se arate că numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2=0$ este egal cu numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2=1$.

4. Fie K un corp finit de caracteristică $p, a\in K^*$ şi $f\in K[X]$. Arătaţi că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:
(a) $f(X)=f(X+a)$;
(b) există $g\in K[X]$ astfel încât $f(X)=g(X^p-a^{p-1}X)$.

Notă: Timp de lucru 3 ore