CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
GRIGORE C. MOISIL
Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA a V -a

Problema 1. Determinaţi valorile naturale ale lui n şi cifra nenulă x pentru care:

$$3^{n+6} + 3^{n+5} + 3^{n+4} + 2 \cdot 3^{n+3} + 4 \cdot 3^n = \overline{xxxx}$$

Gazeta Matematică, nr. 10/2012

Soluţii şi bareme:

Dintre termenii din primul membru al egalităţii cel mai mare este 3^{n+6}.............2p
Din $3^{n+6} \leq 9999$ rezultă că $3^{n+4} \leq 1111$, care implică $n \leq 2$. Aşadar $n \in \{0, 1, 2\}$...2p
Dacă $n = 0$, avem:
$3^6 + 3^5 + 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 1 = 729 + 243 + 81 + 54 + 4 = 1111$, deci $x = 1$...........1p
Dacă $n = 1$, avem:
$3^7 + 3^6 + 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3 = 2187 + 729 + 243 + 162 + 12 = 3333$, deci $x = 3$......1p
Dacă $n = 2$, avem:
$3^8 + 3^7 + 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 3 \cdot 3^2 = 6561 + 2187 + 729 + 486 + 36 = 9999$, deci $x = 9$....1p

Problema 2. Fără a efectua împărţirea, să se determine restul împărţirii numărului 2011201220132014201320122011875 la 75. Justificaţi răspunsul.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţii şi bareme:
Suma cifrelor numărului este:

$$(3+1)+(3+2)+(3+3)+(3+4)+(3+3)+(3+2)+(3+1)+(15+5)=M_3,$$

deci numărul se divide cu 3 .... 2p
Cum numărul se termină cu 75 rezultă că el se divide cu 25. .... 2p
Deoarece $(3,25)=1$, rezultă că numărul dat se divide cu $3\cdot 25=75$ 2p
restul împărţirii numărului dat la 75 este egal cu 0 .... 1p

Problema 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţiile:
a) $3x - 2y = 2013$;
b) $3x^2 - 2y^2 = 2013$.

Maria Pop, Cluj-Napoca

Soluţii şi bareme:
a) $3 \mid 3x$ şi $3 \mid 2013 \Rightarrow 3 \mid 2y \Rightarrow 3 \mid y$;
Fie $y = 3y_1,\ y_1 \in \mathbb{N}$ 1p
Avem:
(1) $x - 2y_1 = 671$, de unde rezultă x impar, adică $x = 2x_1 + 1,\ x_1 \in \mathbb{N}$ 1p
Din (1) rezultă $x_1 - y_1 = 335$, adică $y_1 = k \in \mathbb{N},\ x_1 = 335 + k, k \in \mathbb{N}$
Ecuaţia a) are o infinitate de soluţii
$(x, y) \in \{(2k + 671, 3k),\ k \in \mathbb{N}\}$ 2p
b) Din $3 \mid 3x^2 - 2013 = 2y^2$ avem $3 \mid y$ adică $y = 3y_1,\ y_1 \in \mathbb{N}$
Ecuaţia de la b) devine $x^2 - 6y_1^2 = 671$ 1p
Cum 671 împărţit la 6 dă restul $5 \Rightarrow x^2$ împărţit la 6 trebuie să dea restul 5 . . . . 1p
Dar x^2 împărţit la 6 dă resturile $0,\ 1,\ 4,\ 3$ şi cum $5 \notin \{0, 1, 3, 4\}$ deducem că ecuaţia de la b) nu are soluţii în numere naturale 1p

Problema 4. Presupunem că avem un cântar defect care greşeşte cu aceeaşi greutate la fiecare cântărire. Nu ştim dacă eroarea este în plus sau în minus, nici cât este ea de mare şi nu dispunem de obiecte de greutate cunoscută. În aceste condiţii, cu un asemenea cântar, să se găsească numărul minim de cântăriri prin care putem afla greutatea corectă a două obiecte.

Soluţii şi bareme:

Fie A şi B cele două obiecte. Cântărim împreună obiectele A şi B, apoi cântărim obiectul A singur 2p

Scădem din rezultatul primei cântăriri, rezultatul cântăririi lui A şi obţinem greutatea corectă a lui B, deoarece eroarea introdusă de cântar este identică în cele două cântăriri şi a fost eliminată împreună cu greutatea lui A 2p

Apoi, cântărim pe B şi scăzând rezultatul din prima cântărire obţinem greutatea corectă a lui A. 2p

Avem nevoie de 3 cântăriri pentru a afla greutăţile corecte ale celor două obiecte... 1p