CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
GRIGORE C. MOISIL
Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA a VI -a

Problema 1. a) Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 3^{n+1} \cdot 7^n + 4$ şi $b = 3^n \cdot 7^{n+1} + 6$, unde n este un număr natural.
b) Determinaţi n natural, pentru care cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b este 91.

Gazeta Matematică, nr. 11/2012

Soluţii şi bareme:
a) Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b 0.5p
Din $d \mid a$ şi $d \mid b$ rezultă $d \mid 7a - 3b$ 1p
Cum $7a - 3b = 3^{n+1} \cdot 7^{n+1} + 28 - 3^{n+1} \cdot 7^{n+1} - 18 = 10$ 0.5p
rezultă $d \mid 10$, adică $d \in \{1, 2, 5, 10\}$ 0.5p
Numerele a şi b sunt impare, rezultă că $d \in \{1, 5\}$ 0.5p
Cum $b = 3^n(5 + 2)^{n+1} + 6 = M_5 + 3^n \cdot 2^{n+1} + 6 = M_5 + 2 \cdot 6^n + 6 =$
$= M_5 + 2(5 + 1)^n + 5 + 1 = M_5 + 3$ 1p
deducem că $d = 1$ 0.5p

b) Observăm că $91 = 7 \cdot 13$ 0.5p
Pentru $n = 0$ avem $a = 7$ şi $b = 13$, adică 91 este cel mai mic multiplu comun pentru numerele a şi b 1p
Pentru $n \geq 1$, numerele a şi b nu se divid cu 7, ceea ce implică că cel mai mic multiplu comun nu poate avea factorul 7 .... 1p
Rezultă $n = 0$.

Problema 2. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC, $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Înălţimea AD, $D \in (BC)$ şi bisectoarea BE, $E \in (AC)$ a unghiului $\widehat{ABC}$ se intersectează în punctul M. Dacă F este simetricul lui E faţă de A, arătaţi că $FM \perp BE$.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţii şi bareme:

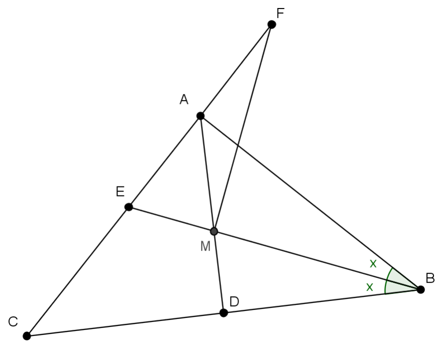

Figura 0.5p
Notăm $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{EBA}) = x$.
În triunghiul dreptunghic DBM, avem $m(\widehat{DMB}) = 90° - x$ 1p

Din $\widehat{DMB}$ şi $\widehat{AME}$ opuse la vârf rezultă $m(\widehat{AME}) = 90° - x$ 0.5p
Din triunghiul dreptunghic BAE, avem $m(\widehat{AEB}) = 90° - x$ 1p
Atunci triunghiul AEM este isocel şi $m(\widehat{EAM}) = 180° - (90° - x + 90° - x) = 2x$ ... 1p
Cum $EA = AF$, din simetria lui E şi F faţă de A şi $AM = AE$, deducem că $AF = AM$.
Deci triunghiul AMF este isoscel 1p
Unghiul $\widehat{EAM}$ este exterior triunghiului AME, ceea ce implică
$m(\widehat{AMF}) = \frac{1}{2}m(\widehat{EAM}) = x$ 1p
Acum, putem scrie
$m(\widehat{EMF}) = m(\widehat{EMA}) + m(\widehat{AMF}) = 90° - x + x = 90°$ 1p
Deci, avem $FM \perp BE$.

Problema 3. Se ştie că $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ este divizibil cu 360. Să se afle $a+d$ şi $b+c$. Câte numere $\overline{abcd}$ cu această proprietate există ?

Ghiţă Romanţa, Ghiţă Ioan - Blaj

Soluţii şi bareme:

Avem:

$1001(a+d)+110(b+c)\vdots 360$ 1p

sau

$720(a+d)+281(a+d)+110(b+c)\vdots 360$ 0.5p

sau

$281(a+d)+110(b+c)\vdots 360$ 0.5p

Cum $1\leq a+d\leq 18$ este necesar ca $a+d=10$ 1p

Rezultă că:

$2810+110(b+c)\vdots 360$ 0.5p

sau

$281+11(b+c)\vdots 36$ 0.5p

sau

$36\cdot 7+29+11(b+c)\vdots 36$ 0.5p

sau $29+11(b+c)\vdots 36$, cu b+c impar 0.5p

Rezultă că $b+c\in\{1,3,5,7,9,11,13,15,17\}$. Verifică doar $b+c=17$ 1p

Cum $a+d=10$ pentru 9 situaţii ($a\neq 0$) şi $b+c=17$ pentru 2 situaţii, obţinem că există $2\cdot 9=18$ numere $\overline{abcd}$ 1p

Problema 4. Pătratele unei foi de matematică de dimensiuni $n \times n$, $n > 3$ se colorează cu trei culori. Să se arate că există două linii şi o culoare astfel ca numărul pătratelor de culoarea respectivă de pe cele două linii să fie acelaşi. Analizaţi cazul $n = 3$.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Soluţii şi bareme:

Dacă prin absurd, presupunem că din fiecare culoare pe toate liniile 1p

avem numere diferite de pătrate de culoarea respectivă, atunci în pătrat am avea cel puţin $0 + 1 + 2 + ... + (n - 1)$ pătrate de fiecare culoare 1p

În total am avea $\frac{3(n-1)n}{2}$ pătrate colorate 2p

Dar $\frac{3(n-1)n}{2} > n^2 (\Leftrightarrow 3n - 3 > 2n \Leftrightarrow n > 3)$ 1p

Avem mai multe pătrate colorate decât sunt pe foaie 1p

Pentru $n = 3$ colorarea se poate face astfel ca pe fiecare linie şi coloană să avem număr diferit de pătrate de fiecare culoare:

a	b	b
c	c	b
a	c	a

.... 1p