CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ GRIGORE C. MOISIL
Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA a VII -a

Problema 1. Fie $ABCD$ un patrulater şi $\{O\} = AC \cap BD$. Arătaţi că dacă

$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} + \frac{S_{BOC}}{S_{COD}} + \frac{S_{COD}}{S_{AOD}} + \frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = 4$$

atunci ABCD este paralelogram (S_{XYZ} reprezintă aria triunghiului XYZ).

Gazeta matematică nr. 1/2013

Soluţii şi bareme:

Notăm cu x măsura unghiului $\widehat{AOB}$ şi utilizăm formula $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$ 1p

Relaţia din enunţ devine:

$\frac{AO \cdot BO \cdot \sin x}{OB \cdot OC \cdot \sin x} + \frac{BO \cdot OC \cdot \sin x}{OC \cdot OD \cdot \sin x} + \frac{OC \cdot OD \cdot \sin x}{AO \cdot DO \cdot \sin x} + \frac{AO \cdot DO \cdot \sin x}{AO \cdot BO \cdot \sin x} = 4$ 1p

sau

(1) $\frac{AO}{OC} + \frac{OB}{OD} + \frac{OC}{OA} + \frac{OD}{OB} = 4$ 1p

Utilizăm inegalitatea: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ 1p

cu egalitate dacă $x = y$; avem:

(2) $\frac{AO}{OC} + \frac{OB}{OD} + \frac{OC}{OA} + \frac{OD}{OB} = (\frac{OA}{OC} + \frac{OC}{OA}) + (\frac{OB}{OD} + \frac{OD}{OB}) \geq 2 + 2 = 4$ 1p

Din (1) şi (2), rezultă $AO = OC$ şi $OB = OD$, ceea ce ne arată că diagonalele patrulaterului ABCD se înjumătăţesc 1p

Deducem că ABCD este paralelogram 1p

Problema 2. Fie patrulaterul ABCD cu $AB = BC = AD$, $m(\widehat{BAC}) = 20°$ şi $m(\widehat{ABD}) = 40°$. Dacă O este punctul de intersecţie al diagonalelor, demonstraţi că $[OC] \equiv [OD]$.

Ghiţa Romanţa, Ghiţa Ioan, Blaj

Soluţii şi bareme:
Construim triunghiul echilateral OCE cu $E \in (OB$.

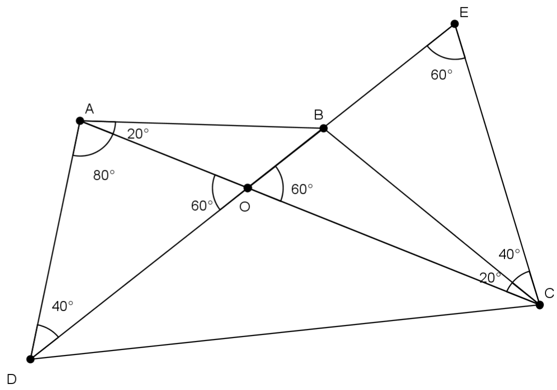

Figura 1p
Avem $m(\widehat{EBC}) = 80°$ şi $m(\widehat{ECB}) = 40°$ 1p
Din $m(\widehat{OAD}) = m(\widehat{CBE}) = 80°$, $m(\widehat{ADO}) = m(\widehat{(BCE)}) = 40°$
şi $AD = BC$ rezultă $\triangle ADO \equiv \triangle BCE (ULU)$ 2p
Rezultă $OD \equiv EC$ 1p
Cum $OC \equiv EC$, deducem $OD \equiv OC$ 1p

Problema 3. Se consideră două numere naturale consecutive care în baza $2b, b \in \mathbb{N}^*$ se termină cu aceeaşi cifră. Să se arate că produsul lor este egal cu pătratul mediei lor aritmetice micşorat cu b^2.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţii şi bareme:

Fie $x = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}_{(2b)}$ un număr arbitrar scris în baza $2b$ 0.5p

Atunci numerele $x - b$ şi $x + b$ reprezintă două numere terminate cu aceeaşi cifră şi consecutive 1p

Într-adevăr, avem:

$x + b = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1}_{(2b)} \cdot 2b + a_0 + b$ 0.5p

şi

$x - b = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1}_{(2b)} \cdot 2b + a_0 - b$ 05p

Dacă $a_0 \geq b$, atunci $a_0 - b$ este cifră în baza $2b$, iar 0.5p

$x + b = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1}_{(2b)} \cdot 2b + 2b + a_0 - b$

care are ultima cifră $a_0 - b$ 0.5p

Rezultă că $x + b$ şi $x - b$ au aceeaşi cifră finală $a_0 - b$ şi sunt consecutive 0.5p

Dacă $a_0 < b$, atunci $a_0 + b < 2b$ şi este cifră în baza $2b$, iar 0.5p

$x - b = \overline{a_n a_{n-1} ... (a_1 - 1)}_{(2b)} \cdot 2b + 2b + a_0 - b = \overline{a_n a_{n-1} ... (a_1 - 1)}_{2b} \cdot 2b + a_0 + b$ 0.5p

ceea ce ne arată că $x + b$ şi $x - b$ au aceeaşi cifră finală $a_0 + b$ şi sunt consecutive . . . 0.5p

Media lor aritmetică este: $\frac{x+b+x-b}{2} = x$ 0.5p

iar produsul lor este $x^2 - b^2$ 0.5p

adică produsul lor este egal cu pătratul mediei lor aritmetice micşorat cu b^2 . . . . 0.5p

Problema 4. Să se determine $min(max\{\frac{x}{y}+z, zy+\frac{1}{x}, \frac{1}{xz}+y\})$, unde $x,\ y,\ z$ sunt numere reale pozitive.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Soluţii şi bareme:
Fie $A(a,b,c)=max\{a,b,c\},\ a,\ b,\ c\ \in\mathbb{R}$, atunci $(A(a,b,c))^2\geq ac$ 1p

Fie $A(x,y,z)=max\{\frac{x}{y}+z, zy+\frac{1}{x}, \frac{1}{xz}+y\}$. 1p
Avem:
$(A(x,y,z))^2\geq(\frac{x}{y}+z)(\frac{1}{xz}+y)=(\frac{1}{yz}+yz)+(x+\frac{1}{x})\geq 2+2=4$.....................3p
$\forall x,\ y,\ z\ \in\mathbb{R}$, astfel ca $A(x,y,z)\geq 2,\ \forall x,\ y,\ z\ \in\mathbb{R}$. Deoarece $A(1,1,1)=2$ rezultă că $minA(x,y,z)=2$ şi se atinge în $x=1,\ y=1,\ z=1$ 2p