CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
GRIGORE C. MOISIL
Ediţia a XXVIII - a, Bistriţa, 15 -17 martie 2013

CLASA a VIII -a

Problema 1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră dreaptă cu bazele pătratele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ în care $AA' = \sqrt{2}$ şi $AB = 1$. Notăm cu M, N, O mijloacele segmentelor [BB'], [DD'] şi [BD].
a) Arătaţi că $A'B \perp (AMD)$;
b) Dacă $\{G\} = A'O \cap (AMN)$, arătaţi că G este centrul de greutate atât pentru triunghiul AMN cât şi pentru triunghiul $A'BD$.

Gazeta Matematică, nr. 10/2012

Soluţii şi bareme:
a) Fie $X = AM \cap A'B$; triunghiurile $A'XA$ şi BXM sunt asemenea, cu raportul de asemňare $\frac{A'A}{BM} = 2$ 1p
Avem: $AX = \frac{2}{3}AM$, $A'X = \frac{2}{3}A'B$, deci
$A'X^2 = \frac{4}{9}A'B^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AA'^2) = \frac{4}{3}$
$AX^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + BM^2) = \frac{2}{3}$
Se verifică relaţia $AX^2 + A'X^2 = 2 = AA'^2$, deci triunghiul AXA' este dreptunghic, adică $A'B \perp AM \subset (AMD)$ (1) 1p
Pe de altă parte, $DA \perp (A'AM)$, deci $DA \perp AM$ (2).
Din (1) şi (2) rezultă $AM \perp (ADM)$ 1p

b) Fie $\{Y\}$ mijlocul lui MN.
Avem $YO \perp AD$ şi $AA' \perp AO$, deci $AA' \parallel OY$. Dreptele A'O şi AY sunt concurente şi cum $AY \subset (AMN)$ rezultă că $\{G\} = A'O \cap AY$ 2p
Triunghiurile $A'GA$ şi OGY sunt asemenea, cu raportul de asemănare $\frac{AA'}{OY} = 2$, deci $\frac{AG}{AY} = \frac{2}{3}$ şi $\frac{A'G}{A'O} = \frac{2}{3}$ 1p
Deoarece AY este mediană în triunghiul AMN şi A'D este mediană în triunghiul A'BD rezultă că G este centru de greutate în triunghiul AMN şi tot G este centru de greutate în triunghiul ABD 1p

Problema2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea

$$(1)\ [x, y] = [f(x), f(y)], \forall x,\ y\ \in \mathbb{N}^* \text{ cu } x \neq y$$

(unde $[x, y]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y).

Maria Pop, Cluj-Napoca

Soluţii şi bareme:
Arătăm că singura funcţie este

$$f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{N}^*$$

Pentru $x \neq 1$ avem:
$x = [1, x] \overset{(1)}{=} [f(1), f(x)] \Rightarrow$ 2p
$\Rightarrow f(1) \mid x$ şi $f(x) \mid x,\ \forall x \neq 1$ 1p
Din $f(1) \mid 2$ şi $f(1) \mid 3$ rezultă $f(1) = 1$ 1p
şi revenind în (1) rezultă
$x = [f(1), f(x)] = [1, f(x)] = f(x),\ \forall x \neq 1$ 2p
deci $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{N}^*$ 1p

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram de arie 1 în care $AD \leq AB \leq BD < AC$. Să se arate că paralelogramul poate fi acoperit cu un dreptunghi de arie $\sqrt{3}$.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Soluţii şi bareme:

Fie O intersecţia diagonalelor AC şi BD şi punctele D' pe semidreapta OD şi B' pe semidreapta OB, astfel ca OD'=OB'=OC=OA (punctele D şi B se află pe segmentul [D'B']) 1p

Patrulaterul $AB'CD'$ este un dreptunghi care acoperă paralelogramul ABCD 1p

Vom arăta că aria sa este cel mult $\sqrt{3}$. Avem:

$\frac{\mathcal{A}(AB'CD')}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{2\mathcal{A}(ACD')}{2\mathcal{A}(ACD)} = \frac{OD'}{OD} = \frac{OA}{OD}$..1p

În triunghiul ABD, AO este mediană şi avem :

$OA^2 = \frac{2(AB^2+AD^2)-BD^2}{4} \leq \frac{2(BD^2+BD^2)-BD^2}{4} = \frac{3BD^2}{4} = 3OD^2$............................2p

şi atunci $(\frac{OA}{OD})^2 \leq 3$, deci $\frac{OA}{OD} \leq \sqrt{3}$ 1p

Dacă $\mathcal{A}(AB'CD') < \sqrt{3}$ prelungim OC la OC_1, OD' la OD_1, OA la OA_1, OB' la OB_1 astfel încât $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$ 1p

şi dreptunghiul $A_1B_1C_1D_1$ să aibă aria exact $\sqrt{3}$.

Problema 4. Fie $a, b \geq 0$ numere reale cu proprietatea că $|a-b| \geq \sqrt{ab}$. Demonstraţi că:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{3} \leq \frac{a^5+b^5}{5}$$

Ghiţă Romanţa, Ghiţă Ioan - Blaj

Soluţii şi bareme:

Pentru $a = 0$ sau (şi) $b = 0$ avem o inegalitate evidentă 0.5p

Fie $a, b > 0$ 0.5p

Avem echivalent:

$5a^5 + 5a^2b^3 + 5b^2a^3 + 5b^5 \leq 6a^5 + 6b^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5a^2b^2(a+b) \leq (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ 1p

Împărţim relaţia prin $a + b$ şi obţinem:

$\Leftrightarrow ab(a^2+b^2) \leq a^4 - 4a^2b^2 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 6a^2b^2$ 1p

Notăm $a \cdot b = P$ şi $a + b = S$

$\Leftrightarrow P(S^2 - 2P) \leq (S^2 - 2P)^2 - 6P^2$ 1p

$\Leftrightarrow PS^2 - 2P^2 \leq S^4 - 4PS^2 - 2P^2$

$\Leftrightarrow S^4 > 5PS^2 \Leftrightarrow S^2 > 5P$ 1p

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 3ab$ 1p

$\Leftrightarrow (a-b)^2 > ab \Leftrightarrow \mid a - b \mid > \sqrt{ab}$ "A" 1p